ÉCOLE NATIONALE DU GÉNIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1999

MATHÉMATIQUES : ÉPREUVE A

COMMUNE AUX DEUX FILIÈRES

DURÉE : 3 heures.

***N.B.** : Ce sujet comporte 4 pages de texte.*
Les calculatrices sont interdites.

Exercice Préliminaire.

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\phi : I \to J$ une bijection vérifiant $\phi(0) = 0$. On suppose que ϕ et ϕ^{-1} ont des développements limités à l'ordre n :
$\phi(x) = a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$, $\phi^{-1}(x) = b_1 x + \ldots + b_n x^n + x^n \varepsilon_1(x)$.
Soient $P(X) = a_1 X + \ldots + a_n X^n$ et $Q(X) = b_1 X + \ldots + b_n X^n$ les polynômes associés à ces développements. Montrer que le polynôme $P(Q(X)) - X$ est multiple de X^{n+1}.

Problème.

Notations. Pour $n \in \mathbb{N}$ on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes d'une indéterminée à coefficients réels, de degré au plus n.

Pour tout espace vectoriel considéré, on notera I l'application identité. Si f est un endomorphisme de cet espace vectoriel, et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme, on rappelle que $P(f)$ est défini comme l'endomorphisme $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$ où f^k est la composée de k exemplaires de f (avec la convention $f^0 = I$).

Pour tout espace vectoriel réel, $L(E)$ désignant l'espace des endomorphismes de E, on note $\mathcal{N}(E)$ le sous-ensemble des endomorphismes nilpotents.

I

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $f \in \mathcal{N}(E)$. Montrer que $Im(f)$ est un sous-espace de E de dimension au plus $n-1$, stable par f et que la restriction de f à $Im(f)$ est dans $\mathcal{N}(Im(f))$. En déduire que

l'on a $f^n = 0$ (on pourra raisonner par récurrence sur $n = dim(E)$).

2. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{N}(E)$, l'application $I + f$ est inversible avec :
$(I+f)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^k$.

3. Soit $f \in \mathcal{N}(E)$, $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Prouver que l'on a $P(f) \in \mathcal{N}(E)$ si et seulement si P est multiple de X.

4. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $\phi(0) = 0$ et admettant une fonction réciproque définie sur un voisinage de 0. On suppose que ϕ et ϕ^{-1} sont développables en séries entières en 0 : $\phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$, $\phi^{-1}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k$.On pose $P(X) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k X^k$. Démontrer l'implication $f \in \mathcal{N}(E) \Rightarrow P(Q(f)) = f$.

II

Dans cette section, E désigne l'espace $\mathbb{R}_n[X]$. On considère les deux endomorphismes f, g de E définis par les formules :

$$P(X) \in E \mapsto f(P)(X) = P(X+1) - P(X) \; ; \; P(X) \in E \mapsto g(P)(X) = P'(X).$$

1. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$. Montrer que l'on a $f \in \mathcal{N}(E)$ et calculer f^n.

2. Vérifier que l'on a $g \in \mathcal{N}(E)$. Montrer, en utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, qu'il existe $P_1 \in E$ satisfaisant l'égalité $P_1(g) = f$, en explicitant ce polymôme P_1.

3. Etablir l'égalité : $g = f - f^2/2 + \ldots + (-1)^{(n-1)} f^n/n$.

4. Montrer, par récurrence, que pour $m \geq 1$ on a
$f^m(P)(X) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k P(X+k)$
où les C_m^k sont les coefficients du binôme. En déduire l'existence de constantes c_k, indépendantes de $P \in E$, vérifiant la relation :
$\forall P \in E, \; P'(X) = -\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) P(X) + \sum_{k=1}^{n} c_k P(X+k)$.
On déterminera la valeur des c_k. En déduire l'égalité : $\sum_{k=1}^{n} c_k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

III

Dans cette section $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application $B : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\forall (P,Q) \in E \times E, \; B(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

1. Démontrer que B est un produit scalaire sur E.

2. Montrer que pour tout entier k il existe un unique polynôme $Q_k \in E$ satisfaisant $\forall P \in E,\ B(P, Q_k) = P(k)$.

3. On note $\Pi(X)$ le polynôme $X(X-1)\cdots(X-n)$. Montrer que pour $0 \leq k \leq n$, Q_k est de la forme $\alpha_k \dfrac{\Pi(X)}{X-k}$ où α_k est une constante que l'on précisera. Prouver que les polynômes $Q_0, \ldots, Q_n$ constituent une base de E orthonormale pour le produit scalaire B. Calculer les valeurs des nombres $\beta_k = Q_k'(0)$, pour $0 \leq k \leq n$.

4. Soit $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k$. Démontrer que ce polynôme satisfait $\forall P \in E,\ B(Q, P) = P'(0)$ si et seulement si $a_k = \beta_k$ pour $0 \leq k \leq n$. Expliquer comment ce résultat permet de retrouver celui de la question II.4.

IV

Dans cette section E est l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels d'une indéterminée. On le munit de la norme $\| \ \|$ définie par : $\| \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \| = \max_{0 \leq k \leq n} (|a_k| k!)$. (On vérifiera brièvement que $\| \ \|$ est bien une norme sur E).

A tout endomorphisme $f \in L(E)$ on associe le sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$ (éventuellement vide) : $M(f) = \{A \in [0, +\infty[\mid \forall P \in E,\ \|f(P)\| \leq A\|P\|\}$.

Soit alors $L_c(E) \subset L(E)$ le sous-ensemble des f pour lesquels on a $M(f) \neq \emptyset$. Pour $f \in L_c(E)$ on définit $|||f||| = \inf M(f)$.

1. Vérifier que $L_c(E)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$, que $||| \ |||$ est une norme sur $L_c(E)$ et que pour $f \in L_c(E)$ on a $|||f||| \in M(f)$. Prouver que pour $(f, g) \in L_c(E)^2$ on a $f \circ g \in L_c(E)$ avec $|||f \circ g||| \leq |||f|||\,|||g|||$. Vérifier que $I \in L_c(E)$. Que vaut $|||I|||$?

Dans la suite de cette section, on considère l'ensemble $\mathcal{N}'(E)$ des $f \in L(E)$ ayant les propriétés suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}$, le sous-espace $\mathbb{R}_n[X] \subset E$ est stable par f et la restriction de f à ce sous-espace est nilpotente.

On pose alors $\mathcal{N}_c'(E) = \mathcal{N}'(E) \cap L_c(E)$.

2. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{N}'(E)$, toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels, et tout $P \in E$, la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n f^n(P)$ a un sens. On note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f^n$ l'application qui à P associe la somme précédente. Vérifier qu'il s'agit d'une application linéaire.

On suppose que l'on a $f \in \mathcal{N}_c'$; prouver alors que si la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > |||f|||$, l'application $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n f^n$ est dans $L_c(E)$. Dans ce cas, donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce soit un élément de $\mathcal{N}_c'(E)$.

3. Soient f et g les éléments de $L(E)$ définis par :
$f(P)(X) = P(X+1) - P(X)$; $g(P)(X) = P'(X)$.

a) Montrer que f est dans $\mathcal{N}'(E)$, que l'on a $g \in \mathcal{N}'_c(E)$ et calculer $|||g|||$.

b) Etablir l'égalité $f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g^n}{n!}$. En déduire que l'on a $f \in \mathcal{N}'_c(E)$ et donner un majorant de $|||f|||$.

c) Déterminer une suite (b_n) satisfaisant l'égalité $g = \sum_{n \in \boldsymbol{N}} b_n f^n$.